

Министерство образования Иркутской области
ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет»
Кафедра математики и методики обучения математике
Кафедра алгебраических и информационных систем

IX открытый региональный творческий конкурс учителей математики

2 этап, 1 тур, 24 марта 2020 года

Алгебра и теория чисел

1. Докажите, что при $x > 1$ выполняется неравенство $\frac{1}{\sqrt{x}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} < \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.
2. Целые числа k, s, t таковы, что $(k+s+t)^2 = -(ks+st+tk)$, а попарные суммы чисел k, s, t не равны 0. Докажите, что произведение любых двух из чисел $k+s, s+t, t+k$ делится на три.
3. Найдите все значения c , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} y - 5 = cx^2 \\ x + \sqrt{5 - y^2 + 4y} = -4 \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение.
4. Для каких целых n уравнение $\frac{3xy-1}{x+y} = n$ имеет решение в целых x и y ?
5. Существует ли такая функция $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \neq \text{const}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — полиномы с действительными коэффициентами, что $f(x) = f(1-x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.
6. Различные натуральные числа a, b, c, d меньше простого числа p , а числа a^4, b^4, c^4, d^4 дают одинаковые остатки при делении на p . Докажите, что $a^{999} + b^{999} + c^{999} + d^{999}$ делится на $a + b + c + d$.